

## 2 상 이론의 유한 요소 모델 개발

### Development of Finite Element Model of Biphasic Theory

박 해 수(기계과)

Hae-Soo Park(Dept. of Mechanical Engineering)

Key Words : Biphasic Theory(2 상이론), Poroelastic Theory(다공탄성 이론), Hydrated Soft Tissues(수화연조직), Permeability(투수계수), FEM(유한요소법), Penalty Formulation(벌칙형 공식화), Numerical Integration(수치적분)

ABSTRACT : A finite element formulation employing linear biphasic theory is developed to study the dynamic response of human hydrated soft tissues. Hydrated soft tissues are modeled as a binary mixture i.e. the fluid and solid. To validate the biphasic finite element formulation, the result of the numerical analysis of a one-dimensional wave propagation problem is compared with that of analytical solution. Comparison of the numerical and analytical results show good agreement. Stress relaxation of soft tissues, the behavior of solid and fluid are understand by experiment, are solved. Due to the estimation, the results from my dynamic formulation by biphasic theory are better than those of the preceding reseachers.

#### 1. 서 론

2 상 이론은 Mow<sup>(1)</sup>에 의해 연골을 해석하기 위하여 개발되었다. 이것은 Bowen<sup>(2)</sup>의 혼합물 이론에 바탕을 둔 것으로 생체 조직의 특성을 표현할 수 있게 다상(multiphase) 혼합물 이론을 2 상으로 단순, 특수화한 것이다. Spilker<sup>(3)</sup>는 관절 연골처럼 수화된(hydrated) 연조직을 수치적으로 해석하기 위해 선형 2 상 이론의 유한 요소 모델을 유도하였다. Galerkin 가중 잔여법(weighted residual method)를 적용하여 유한 요소 공식을 유도하였으며 노드 점의 변수가 고체상의 변위와 유체상의 속도인 1 차 미분 방정식으로 정리하였다. Spilker<sup>(4)</sup>는 또 수치 해석의 정밀도 향상을 위해 mixed-penalty 유한 요소 모델을 유도하였으며, 이 방법을 적용하여 축대칭, 6 점 노드, 3 각형 요소를 개발하였다. Mixed-penalty formulation 이 locking 과 격자 뒤틀림에 대한 민감성에서 penalty formulation 보다 우수하다고 주장하였다. Vermilyea<sup>(5)</sup>는 hybrid 유한 요소 모델을 유도하였다. 고체상과 유체상의 속도를  $C^\infty$  연속으로, 공극 압력(pore pressure)과 응력(elastic stress)을 요소간에 불연속한 것으로 정의하였다. Hybrid 방법이 다른 방법보다 robust 하며 정확한 해를 제공한다고 주장하였다. Suh<sup>(6)</sup>는 연조직의 대변형으로 인한 비선형 문제를 풀기 위해 Spilker<sup>(3)</sup>의 결과를 확장한 벌칙형(penalty) 유한 요소 모델을 개발하였다. 고체를 hyperelastic 으로 가정하였으며, 응력-변형도 관계를 자유 에너지 함수(free energy function)로부터 정의하였다. Total Lagrangian 관점에서 Galerkin 가중 잔여법((weighted residual method)를 사용하여 유한 요소 모델을 유도하였다.

생체역학 분야의 2 상 이론의 개발에 앞서 토질 역학 분야에서는 물로 포화된 토질을 해석하기 위해 Biot<sup>(7)</sup>의 다공탄성 이론(poroelastic theory)을 이용한 유한 요소 모델이 개발되었다. Simon<sup>(8)</sup>은 고체와 유체가 Biot 의 동적 적합성 관계(dynamic compatibility relation)을 만족하는 경

우에 대해 1 차원 해석해를 구하였다. Zienkiewicz<sup>(9)</sup>는 Biot 이 개발한 다공체에 대한 기본 방정식에서 변수를 바꾸거나 근사화하여 몇 가지 다른 형태의 수치 해석 방법을 제시하였는데 벌칙 방법(penalty method)이 제일 유용하다고 하였다. Simon<sup>(10)</sup>은 다공체 해석에 대한 몇 가지 유한 요소 모델을 소개하고 1 차원 문제에 대해서 해석해와 각 방법들의 해석 결과를 비교하는 정확도 시험을 수행하였다.

생체역학 분야의 2 상 이론이 관절 연골 해석을 위하여 개발되었기 때문에 모든 모델이 관성력을 무시한 1 차 미분 방정식의 형태로 되어 있어 충격력이 작용하는 머리 부분등의 해석에 미흡하다. 토질역학 분야에서 개발된 유한 요소 모델은 동적인 효과를 기술하기 위해 관성력은 고려하였지만 2 상 이론과 밀도에 대한 정의가 다르고 대변형의 경우 고체상의 모델이 근본적으로 다르기 때문에 본 연구에서는 동적인 하중이 작용하는 문제를 해석할 수 있도록 기존의 2 상 이론 모델을 확장하였다. 외부 충격에 의해 유체가 빠져 나가는 효과는 압축성을 조절하여 구현하였다. 유도한 유한 요소 모델의 정확도를 검증을 위하여 축대칭 요소를 사용한 1 차원 수치해석과 해석해를 비교하였다. 응용 예제로 실험을 통해 고체와 유체상의 거동이 규명된 응력 감소 문제를 해석하였다

## 2. 2 상 이론(Biphasic theory)

선형 2 상 이론에서는 고체와 유체 모두를 거의 비압축성인 것으로 가정하며 또한 두 상은 서로 동화되지 않는 것(비혼화성, immiscible)으로 가정한다. 유체상은 비점성 유체로 가정하고 점성 효과는 고체와 유체상 사이의 상대 운동 속도에 비례하는 마찰 저항력(diffuse resistant body force)으로 모델링 한다. 이 마찰 저항력은 고체상의 투수계수에 역비례한다. 미소 변형에서는 투수계수와 두 상의 체적비는 변형과 무관하게 일정한 값을 유지하는 것으로 가정한다. 고체상은 등방성의 선형 탄성체로 가정한다. 고체의 체적이  $V^s$  이고 유체의 체적이  $V^f$  이며 전체 체적이  $V$  인 물체가 영역  $\Omega$  와 경계  $\Gamma$  를 가질 때 지배 방정식과 경계 조건식은 다음과 같다. 혼합물에 대한 연속 방정식은

$$\nabla \cdot (\phi^s \dot{\mathbf{u}}^s + \phi^f \dot{\mathbf{u}}^f) = 0 \quad (2-1)$$

이고, 고체와 유체상 각각에 대한 모멘텀 방정식은 다음과 같다.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^s + \boldsymbol{\Pi}^s + \rho^s \mathbf{b} = \rho^s \ddot{\mathbf{u}}^s \quad (2-2)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^f + \boldsymbol{\Pi}^f + \rho^f \mathbf{b} = \rho^f \ddot{\mathbf{u}}^f \quad (2-3)$$

각 상에 대한 구성 방정식은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{\sigma}^s = \lambda_s e^s \mathbf{I} + 2\mu_s \boldsymbol{\epsilon}^s - \phi^s p \mathbf{I} \quad (2-4)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^f = -\phi^f p \mathbf{I} \quad (2-5)$$

고체와 유체상 사이의 상대 운동 속도에 비례하는 저항력은

$$\boldsymbol{\Pi}^s = -\boldsymbol{\Pi}^f = K(\dot{\mathbf{u}}^f - \dot{\mathbf{u}}^s) \quad (2-6)$$

이고, 각 상에 작용하는 표면력에 대한 경계 조건식은

$$\mathbf{t}^s = \bar{\mathbf{t}}^s \quad \text{on} \quad \Gamma_{t^s} \quad (2-7a)$$

$$p = \bar{p} \quad \text{on} \quad \Gamma_{p^f} \quad (2-7b)$$

이며, 각 상에 대한 기하학적인 경계 조건식은 다음과 같다.

$$\mathbf{u}^s = \bar{\mathbf{u}}^s \quad \text{on} \quad \Gamma_{u^s} \quad (2-8a)$$

$$\dot{\mathbf{u}}^f = \bar{\dot{\mathbf{u}}}^f \quad \text{on} \quad \Gamma_{\dot{u}^f} \quad (2-8b)$$

이상의 식들에서 진한 글자는 1 차 혹은 2 차 텐서를 나타내고, 상첨자 s와 f는 각각 고체와 유체상에 관련된 변수임을 나타낸다.  $\bar{\quad}$ 는 해당 변수가 어떤 특정한 값으로 지정됐음을 의미한다. 기호  $\nabla$ 는 gradient 벡터,  $\rho^s$ 는 고체상의 밀도,  $\rho^f$ 는 유체상의 밀도를 나타낸다 ( $\rho = \rho^s + \rho^f$ 는 혼합물의 밀도를 나타내며 이것은 Biot의 정의와는 다르게 정의된다.).  $\phi^s (= V^s/V)$ 는 고체의 체적비,  $\phi^f (= V^f/V)$ 는 유체의 체적비(포화된 물의 경우는  $\phi^s + \phi^f = 1$ 이다),  $\boldsymbol{\sigma}$ 는 응력,  $\boldsymbol{\varepsilon}$ 는 변형도,  $\mathbf{u}$ 는 변위,  $\dot{\mathbf{u}}$ 는 속도,  $\ddot{\mathbf{u}}$ 는 가속도,  $\mathbf{t}$ 는 표면력,  $K$ 는 확산 저항 계수를 나타낸다. 확산 저항 계수는 투수 계수  $k$ 에 역비례한다<sup>(11)</sup>.

$$K = \frac{(\phi^f)^2}{k} \quad (2-9)$$

### 3. 유한 요소 공식의 유도

$\mathbf{w}^s$ 와  $\mathbf{w}^f$ 를 영역  $\Omega$ 에서  $C^0$  연속하며 경계  $\Gamma_{u^s}$ 와  $\Gamma_{\dot{u}^f}$ 에서는 영(zero)의 값을 갖는, 고체와 유체상의 형상 함수라고 하면 고체상에 대한 모멘텀 방정식과 힘(natural) 경계 조건식에 대해 가중 잔여법(weighted residual method)을 적용하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\int_{\Omega} \mathbf{w}^s \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^s + \Pi^s + \rho^s \mathbf{b} - \rho^s \ddot{\mathbf{u}}^s) d\Omega + \int_{\Gamma_{t^s}} \mathbf{w}^s \cdot (\mathbf{t}^s - \bar{\mathbf{t}}^s) d\Gamma = 0 \quad (3-1)$$

마찬가지로 유체상에 대한 모멘텀 방정식과 압력 경계 조건식에 대해 가중 잔여법을 적용하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\int_{\Omega} \mathbf{w}^f \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^f + \Pi^f + \rho^f \mathbf{b} - \rho^f \ddot{\mathbf{u}}^f) d\Omega + \int_{\Gamma_{p^f}} \mathbf{w}^f \cdot \phi^f (p - \bar{p}) \mathbf{n} d\Gamma = 0 \quad (3-2)$$

여기서  $\mathbf{n}$ 은 경계에서 바깥쪽으로 수직한 벡터이다. 벌칙 방법(penalty formulation)을 사용하여 연속 방정식을 표현하면 다음과 같다.

$$\nabla \cdot (\phi^s \dot{\mathbf{u}}^s + \phi^f \dot{\mathbf{u}}^f) + \frac{p}{Q} = 0 \quad (3-3)$$

유체가 압축 가능하다면, 즉  $Q \neq \infty$ 일 때 식 (2-4)와 (2-5)로부터 압력  $p$ 를 소거할 수 있다. 식 (3-3)를 한번 적분하면 다음 식을 얻는다.

$$p = -Q \nabla \cdot (\phi^f \mathbf{u}^f + \phi^s \mathbf{u}^s) \quad (3-4)$$

여기서  $\frac{1}{Q} = \frac{\phi^s}{K_s} + \frac{\phi^f}{K_f}$  이며 고체와 유체의 압축성을 정의하는 표현식이다.  $K_s$ 는 고체상의 체적 탄성계수(bulk modulus)이고,  $K_f$ 는 유체상의 체적 탄성계수이며, and  $Q$ 는 전체 혼합물의 체적 탄성계수이다. 유체가 압축 가능하고 고체는 비압축성이라면  $\phi^s = 1 - \phi^f$ ,  $K_s \rightarrow \infty$ ,  $Q < \infty$  인 관계가 성립한다<sup>(9)</sup>. 식 (3-4)을 식 (2-4)와 (2-5)에 대입하고, 그 결과식에 식 (2-6)을 대입한 후, 가중 잔여 표현식 (3-1)과 (3-2)에 대입하면 변수  $\mathbf{u}^s$ 와  $\mathbf{u}^f$ 에 대한 식으로 정리된다. 연속체를 영역  $\Omega_n$ 과 경계  $\Gamma_n$ 으로 분할하고 weak form 내의 영역 변수(field variable)를  $C^0$  연속하다고 가정하면 다음과 같은 유한 요소의 weak form 을 얻는다.

$$\sum_n \left\{ \int_{\Omega_n} \mathbf{w}^s \cdot \rho^s \ddot{\mathbf{u}}^s d\Omega + \int_{\Omega_n} \mathbf{w}^s \cdot K(\dot{\mathbf{u}}^s - \dot{\mathbf{u}}^f) d\Omega + \int_{\Omega_n} (\nabla \mathbf{w}^s)^T : [\phi^s Q \nabla \cdot (\phi^f \mathbf{u}^f + \phi^s \mathbf{u}^s)] \mathbf{I} + \lambda_s e^s \mathbf{I} + 2\mu_s \boldsymbol{\varepsilon}^s \right\} d\Omega - \int_{\Omega_n} \mathbf{w}^s \cdot \rho^s \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_{r^n}} \mathbf{w}^s \cdot \bar{\mathbf{t}}^s d\Gamma \} = \mathbf{0} \quad (3-5)$$

$$\sum_n \left\{ \int_{\Omega_n} \mathbf{w}^f \cdot \rho^f \ddot{\mathbf{u}}^f d\Omega - \int_{\Omega_n} \mathbf{w}^f \cdot K(\dot{\mathbf{u}}^s - \dot{\mathbf{u}}^f) d\Omega + \int_{\Omega_n} (\nabla \mathbf{w}^f)^T : [\phi^f Q \nabla \cdot (\phi^f \mathbf{u}^f + \phi^s \mathbf{u}^s)] \mathbf{I} - \int_{\Omega_n} \mathbf{w}^f \cdot \rho^f \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_{r^n}} \mathbf{w}^f \cdot \phi^f p n d\Gamma \right\} = \mathbf{0} \quad (3-6)$$

식 (3-5)와 (3-6)에서 고체와 유체의 변위를 다음과 같은 절점(node) 값으로 대체한다.

$$\mathbf{u}^s = \mathbf{N}^s \mathbf{u}_n^s \quad \text{and} \quad \mathbf{u}^f = \mathbf{N}^f \mathbf{u}_n^f \quad (3-7)$$

여기서  $\mathbf{N}^s$ 와  $\mathbf{N}^f$ 는  $C^0$  연속인 형상 함수의 행렬 표현이며  $\mathbf{u}_n^{s,f}$ 는 요소  $n$ 의 절점에서 고체와 유체의 변위이다.  $\mathbf{N}^s = \mathbf{N}^f = \mathbf{N}$ 으로 가정하여 식을 단순화한다. 가중 함수도 변위와 동일한 형상 함수를 사용한다.

$$\mathbf{w}^s = \mathbf{N} \mathbf{w}_n^s \quad \text{and} \quad \mathbf{w}^f = \mathbf{N} \mathbf{w}_n^f \quad (3-8)$$

여기서  $\mathbf{w}_n^{s,f}$ 는 요소  $n$ 에 대한 형상 함수의 계수이다. 고체상의 변형도  $\boldsymbol{\varepsilon}^s$ , 고체상의 체적 변형도(dilatation)  $e^s$ 는 선형 변위-변형도 관계를 적용하여 요소  $n$ 의 절점 변위  $\mathbf{u}_n^s$ 로부터 다음과 같이 내삽하여 구한다.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^s = \mathbf{B} \mathbf{u}_n^s \quad \text{and} \quad e^s = \mathbf{m} \boldsymbol{\varepsilon}^s = \mathbf{m} \mathbf{B} \mathbf{u}_n^s \quad (3-9)$$

여기서  $\mathbf{m}$ 은 Kronecker delta operator 이다. 식 (3-7), (3-8)과 (3-9)를 이용하여 식 (3-5)와 (3-6)을 다음과 같은 행렬 형태로 정리한다.

$$\sum_n \mathbf{w}_n^T \begin{bmatrix} \mathbf{M}_n^s & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_n^f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_n^s \\ \dot{\mathbf{u}}_n^f \end{Bmatrix} + \sum_n \mathbf{w}_n^T \begin{bmatrix} \mathbf{C}_n & -\mathbf{C}_n \\ -\mathbf{C}_n & \mathbf{C}_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_n^s \\ \dot{\mathbf{u}}_n^f \end{Bmatrix} + \sum_n \mathbf{w}_n^T \begin{bmatrix} \mathbf{K}_n^e + Q(\phi^s)^2 \mathbf{K}_n^1 & Q\phi^s \phi^f \mathbf{K}_n^1 \\ Q\phi^s \phi^f \mathbf{K}_n^1 & Q(\phi^f)^2 \mathbf{K}_n^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_n^s \\ \mathbf{u}_n^f \end{Bmatrix} = \sum_n \mathbf{w}_n^T \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_n^s \\ \mathbf{f}_n^f \end{Bmatrix} \quad (3-10)$$

여기서 행렬의 각 요소는 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{M}_n^s = \int_{\Omega_n} \rho^s \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \quad (3-11a)$$

$$\mathbf{M}_n^f = \int_{\Omega_n} \rho^f \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \quad (3-11b)$$

$$\mathbf{C}_n = \int_{\Omega_n} \mathbf{K} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \quad (3-11c)$$

$$\mathbf{K}_n^c = \int_{\Omega_n} (\lambda_s \mathbf{B}^T \mathbf{D}_1 \mathbf{B} + \mu_s \mathbf{B}^T \mathbf{D}_2 \mathbf{B}) d\Omega \quad (3-11d)$$

$$\mathbf{K}_n^1 = \int_{\Omega_n} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_1 \mathbf{B} d\Omega \quad (3-11e)$$

$$\mathbf{f}_n^s = \int_{\Gamma_{f_n^s}} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}}^s d\Gamma + \int_{\Omega_n} \mathbf{N}^T \rho^s \mathbf{b} d\Omega \quad (3-11f)$$

$$\mathbf{f}_n^f = \int_{\Gamma_{f_n^f}} \mathbf{N}^T \phi^f \bar{p} n d\Gamma + \int_{\Omega_n} \mathbf{N}^T \rho^f \mathbf{b} d\Omega \quad (3-11g)$$

$\mathbf{K}_n^1$ 을 수치 적분할 때 Gaussian quadrature의 차수가 높으면 구속 조건의 과도한 적용으로 인해 locking이 발생하고 적분의 차수가 낮으면 rank 결손으로 인한 zero energy mode가 발생하기 때문에 이를 피할 수 있는 방법을 사용하여 수치 적분을 해야 한다. 전체 축소와 선택적 축소<sup>(12)</sup>,  $\bar{\mathbf{B}}$  방법과<sup>(13)</sup> 안정화(stabilization) 방법<sup>(14)</sup> 등이 여러 문제에 적용했을 때 좋은 결과를 제공하는 방법들이다. 평면 2차원과 3차원 요소에 선택적 축소 적분을 적용하면 구속 조건은 요소에서 만족된다. 그러나 축대칭 요소에 선택적 축소 적분을 적용하면 연속 방정식이 요소에서 평균적인 의미로 만족되지 않는다. 축대칭 요소에 대해서는 Nagtegaal 등이<sup>(15)</sup> 제안한 mean dilatation formulation를 이용하면 요소에서 연속 조건을 만족시킬 수 있다. 4절점 요소에 대한 식 (3-11e)의 계산을 다음 식으로 대체한다.

$$\mathbf{K}_n^1 = \frac{\tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{D}_1 \tilde{\mathbf{B}}}{\mathbf{V}_n} \quad (3-12)$$

여기서  $\tilde{\mathbf{B}} = \int_{\Omega_n} \mathbf{B} d\Omega$ 이고  $\mathbf{V}_n = \int_{\Omega_n} d\Omega$ 이다<sup>(3)</sup>.  $\tilde{\mathbf{B}}$ 는 2×2 적분점 모두에서 계산한다. 축대칭 요소에 작용하는 압력은 식 (3-4)을 이용하여 2×2 적분점에서 계산한 결과를 평균한다.

## 4. 유한 요소 모델의 검증

### 4-1. 해석해와의 비교

1차원  $\mathbf{u}^s - \mathbf{w}$  경계치 문제에 대해 Simon 등이<sup>(8,10)</sup> 유도한 해석해와 비교하는 것으로 본 논문에서 개발한 유한 요소 모델의 정확도를 검증하였다. 여기서  $\mathbf{w}$ 는 고체에 대한 유체의 상대 속도이며  $\mathbf{w} = \phi^f(\mathbf{u}^f - \mathbf{u}^s)$ 로 정의된다. 1차원 문제는 그림 4-1에 나타난 것처럼 변형이 x-축 방향으로만 일어난다. 해석해와 수치 계산에서 사용한 물성치는 표 4-1과 같고 그림 4-2와 같은 표면력이 작용하며 하중의 작용 시간은 무차원 시간으로  $\Delta\tau = 32$ 이다. 본 논문에서 개발한 유한 요소 모델의 노드점에서의 변수는  $\mathbf{u}^s - \mathbf{u}^f$ 이며 1차원 문제를 축대칭 요소로 모델링하였으며 시간에 대한 수치 적분은 damped Newmark 방법을 사용하였다<sup>(16)</sup>. 수치적인 감쇠를 주어 무조건 안정하도록 하기 위해  $\delta = 0.6$ 와  $\alpha = 0.3025$ 를 사용하였다. 그림 4-3과 4-4는 하중이 작용하는 표면에서의 무차원화 된 고체 ( $\hat{u} = (uV_c)/(k\sigma_0)$ )와 유체 ( $\hat{w} = (wV_c)/(k\sigma_0)$ )의

변위를 나타낸다. 그림 4-5 와 4-7 은 무차원 시간이  $\tau = 80$  ( $\tau = t/\rho k$ ) 일 때 영역  $0 \leq \xi \leq 120$  ( $\xi = x/\rho k V_c$ ) 에서의 무차원화 된 고체 변위와 유체 변위의 분포를 나타낸다. 여기서  $u$  는 고체의 변위,  $w$  는 유체의 변위,  $V_c = \left( \frac{\lambda + 2\mu + \alpha^2 Q}{\rho} \right)^{0.5}$  는 고체와 유체 사이에 상대운동이 없을 때의 파동의 전파 속도이며, ( $\lambda$  와  $\mu$  는 Lamé 상수,  $Q$  는 혼합물의 체적 탄성계수,  $\rho$  는 혼합물의 밀도,  $\alpha$  는 생체 조직의 경우 1로 가정한다.),  $k$  는 투수계수,  $\sigma_0$  는 하중의 진폭,  $t$  는 시간,  $x$  는 표면으로부터의 거리이다. 무차원 시간이  $\tau = 80$  일 때 영역  $0 \leq \xi \leq 120$  사이에서 수치 결과와 해석해에 의한 무차원화 된 압력 ( $\hat{p} = p/\sigma_0$ ) 분포를 비교하였는데 그림 4-7 에서 보는 바와 같이 두 결과가 잘 일치함을 알 수 있다. 그림 4-8 에서는 무차원화 된 응력 ( $\hat{\sigma} = \sigma/\sigma_0$ ) 분포를 비교하였다. 표면에서 두 결과 사이에 차이가 생겼으며 이러한 차이의 원인은 변위는 일치하지만 압력과 응력에서 차이가 생긴 것으로 보아 Gaussian quadrature 에 의한 수치 적분에 원인이 있는 것으로 생각된다. 현재의 방법으로는 피할 수 없는 결과이며 새로운 수치 방법을 제안해야 개선할 수 있을 것으로 생각된다. 고체와 유체가 혼합된 본 예제와 같은 초기 경계치 문제의 해에는 2 개의 파(wave)가 존재한다. 그림 4-7 과 4-8 에 나타낸 바와 같이 무차원 시간이  $\tau = 80$  일 때 속도  $V_c = 1$ 로 전파되는 첫번째 파(first kind wave)는  $\xi = 80$  에 도달해 있으며 속도  $V_c = 0.115$ 로 전파되는 두번째 파(second kind wave)는  $\xi = 9.23$ 에 도달해 있다.

표 4-1. 유한 요소 모델 검증에 사용된 물성치

Lamè's constant		Porosity	Bulk modulus	Permeability	Density	
$\lambda$ (MPa)	$\mu$ (MPa)	$\phi^f$	Q(Pa)	$k(m^4/N \cdot s)$	$\rho^s$	$\rho^f$
833.3	1250	0.333	$1.201 \times 10^5$	$1.6402 \times 10^{-3}$	0.2069	0.0991

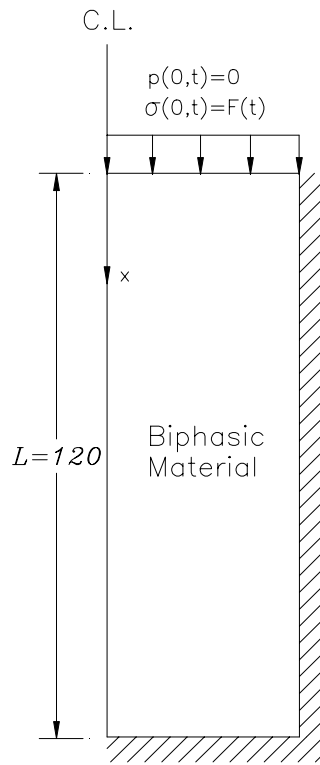


그림 4-1. 결과 검증에 사용된 1 차원 경계치 문제

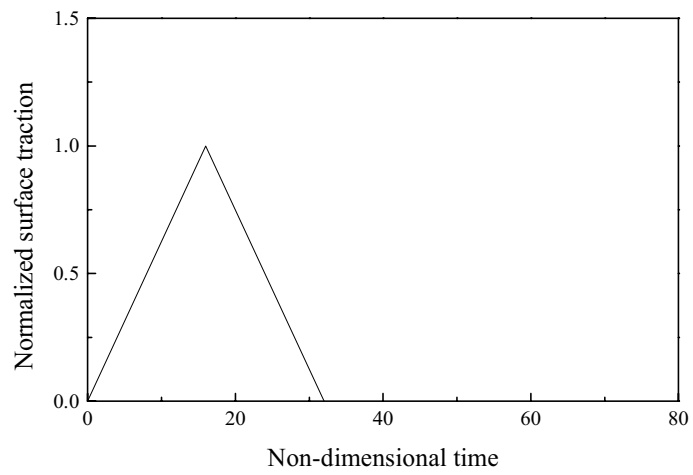


그림 4-2. 표면에 작용시킨 하중  $\hat{\sigma}_0 = \sigma(0, \tau) / \sigma_0$  at  $\xi = 0$ .

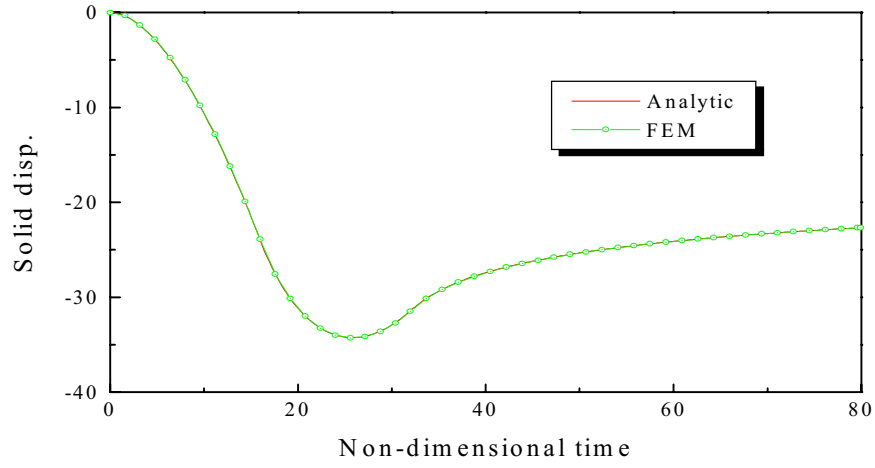


그림 4-3. 표면에서 고체상의 변위  $\hat{u} = (uV_c)/(k\sigma_0)$  at  $\xi = 0$ .

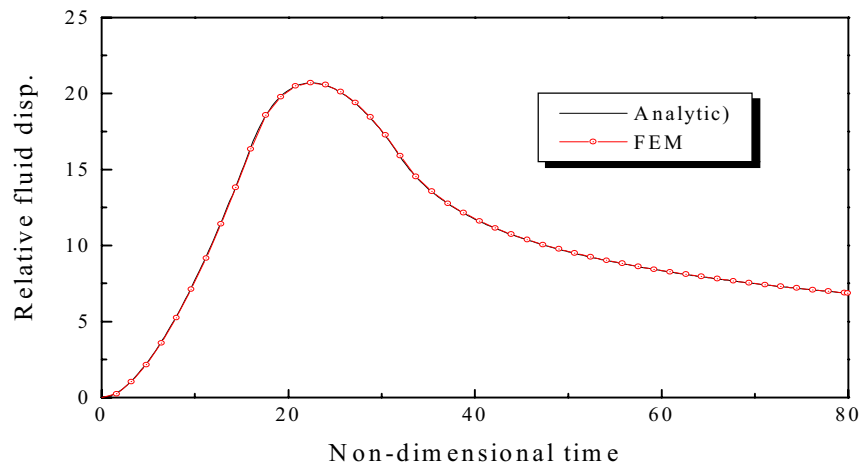


그림 4-4. 표면에서 유체의 상대 변위  $\hat{w} = (wV_c)/(k\sigma_0)$  at  $\xi = 0$ .



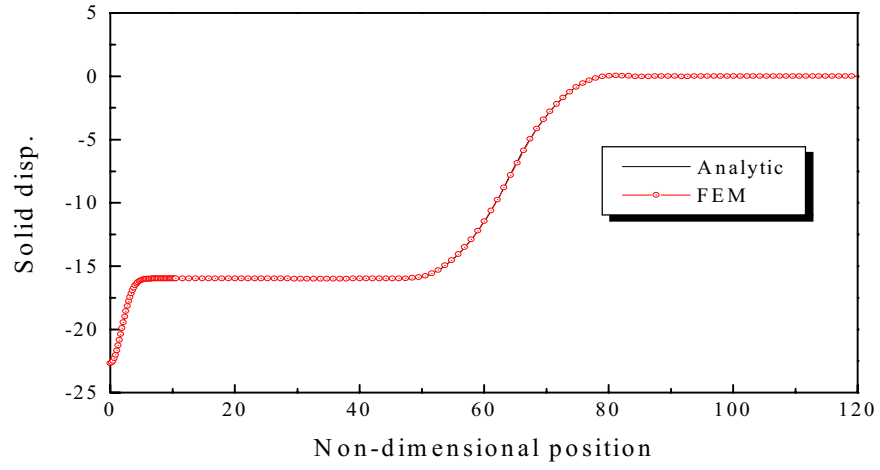


그림 4-5. 깊이별 고체상의 변위  $\hat{w} = (wV_c)/(k\sigma_0)$  at  $\tau = 80$ .

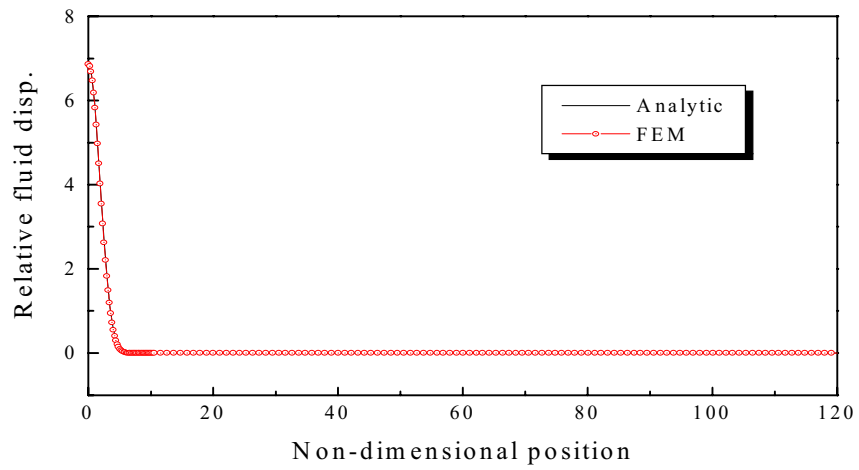


그림 4-6. 깊이별 유체의 상대 변위  $\hat{w} = (wV_c)/(k\sigma_0)$  at  $\tau = 80$ .

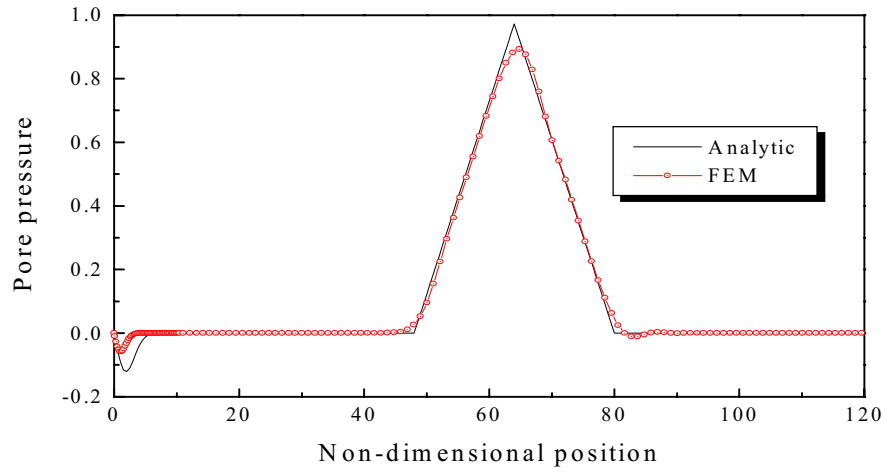


그림 4-7. 깊이별 공극 압력 변화  $\hat{p} = p/\sigma_0$  at  $\tau = 80$  for  $0 \leq \xi \leq 120$ .

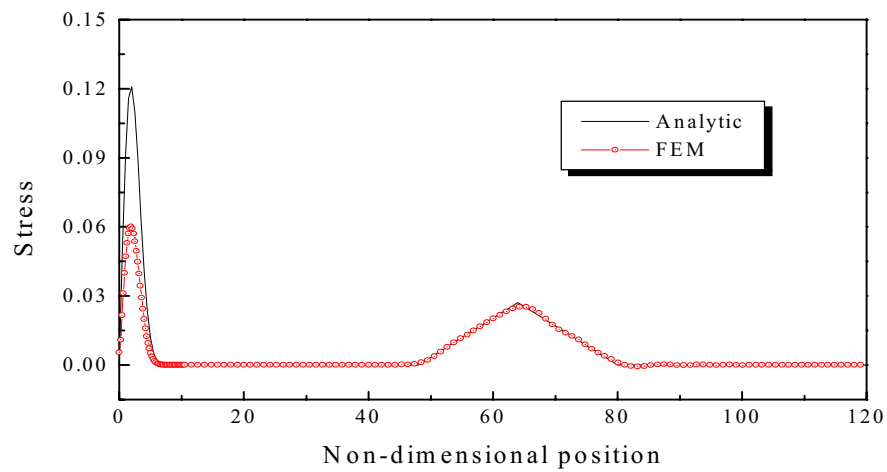


그림 4-8. 깊이별 고체상의 응력 변화  $\hat{\sigma} = \sigma/\sigma_0$  at  $\tau = 80$  for  $0 \leq \xi \leq 120$ .

## 5. 생체 연조직의 응력 감소

해석에 사용한 물성치와 하중 계수는 표 4-2 와 같다. 변형  $\hat{u}_z^s$  에 도달할 때까지는 일정한 비율로 압축하고 그 이후에는  $\hat{u}_z^s$  로 유지하는 1 차원 압축 실험에 대한 2 상 조직의 응력 감소

현상을 그림 4-9 에 나타내었다. 압축 과정에서의 응력 증가는 유체의 유출(exudation)로 인해 발생하고 응력 감소는 유체가 다공성 고체망 내부로 재배치(redistribution)됨으로써 일어난다. 압축 과정 동안에는 간질 유체가 강제 유출되고 이로 인해 표면 가까이에 있는 고체망이 압착되면서 응력이 증가하게 된다. 응력 해제는 표면의 압착된 고체망이 압착 해제로 인해 반발(rebound)하면서 일어나는 현상이다. 이러한 하중 해제는 고체망 내부에 생성된 응력이 전 영역에 걸쳐 균일해질 때까지 계속되며 최종적으로 도달하는 값은  $\hat{u}_z^s$ 에 해당하는 변형도와 고체의 탄성계수를 곱한 값이다.

그림 4-10 은 깊이 5%, 20%, 75%에 있는 요소의 압력 변화를 나타내고 있다. 압력은 깊은 곳이 높으며 변형이  $\hat{u}_z^s$ 에서 정지한 이후에는 서서히 소멸된다. 그림 4-11 은 깊이 5%, 20%, 75%에 있는 고체에 작용하는 응력의 변화를 나타내고 있다. 응력은 표면에서 가까운 곳일수록 크며 압축이 멈춘 이후부터 해제되기 시작하여  $\sigma = E\varepsilon$ 로 계산한 33.75 kPa로 수렴해 간다. 그림 4-12 는 깊이에 대한 속도 분포의 변화를 나타내고 있다. 500 초 동안 천천히 압축하므로 초기에는 표면에서만 유출이 일어나며 시간이 경과함에 따라 바닥에서도 유동이 발생하게 되고 시간이 더 경과하면 깊이에 대해 선형적으로 변하는 분포를 나타낸다. 그림 4-13 은 깊이에 대한 압력 분포의 변화를 나타내고 있다. 초기 5 초에는 표면 층 30%에서만 거동이 일어나고 그 이하의 움직이지 않고 있는 상태이므로 압력 구배도 30% 부분에서만 생성된다. 시간이 경과하면서 유동이 바닥 층까지 확산되어 400 초에서와 같은 선형적인 압력 분포를 유지하게 된다. 그림 4-14 는 깊이에 대한 응력 분포의 변화를 나타내고 있다. 응력도 압력과 마찬가지로 초기에는 고체의 변형이 표면 층에서만 일어나므로 표면 층에 있는 고체에만 응력이 발생하다가 유동이 바닥 층까지 확산되면서 바닥 층의 고체에도 응력이 작용한다. 그러나 응력의 분포는 압력과 반대되는 형상을 갖는다.

표 4-2. 연조직의 응력 감소 해석에 사용된 물성치와 하중 조건

a. Material properties.

Lamé's constant (MPa)		Porosity	Bulk modulus	Permeability	Density	
$\lambda$	$\mu$	$\phi^f$	Q(Pa)	$k(m^4/N \cdot s)$	$\rho^s$	$\rho^f$
0.1	0.3	0.83	$1.0 \times 10^9$	$7.6 \times 10^{-15}$	38.8	84.7

b. Load parameters.

Diameter d(mm)	Height h(mm)	Prescribed disp. $\hat{u}_z^s = \varepsilon h$	Loading time $t_0$ (sec)
6.35	1.78	$\varepsilon = 5\%$	500

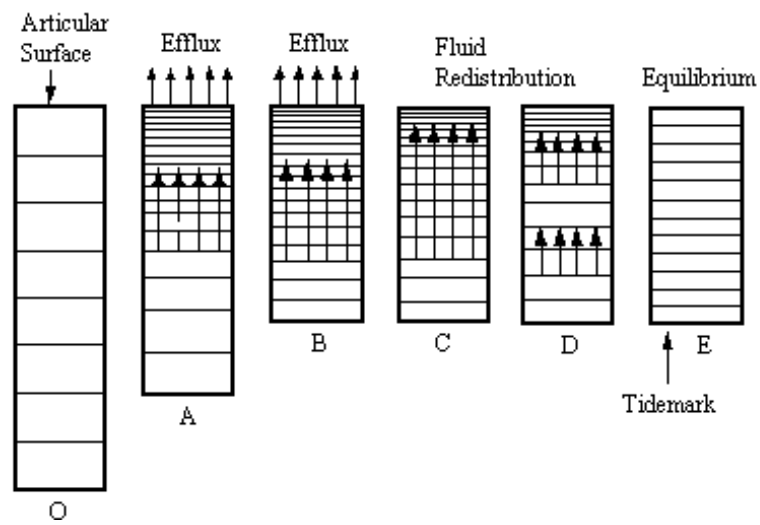
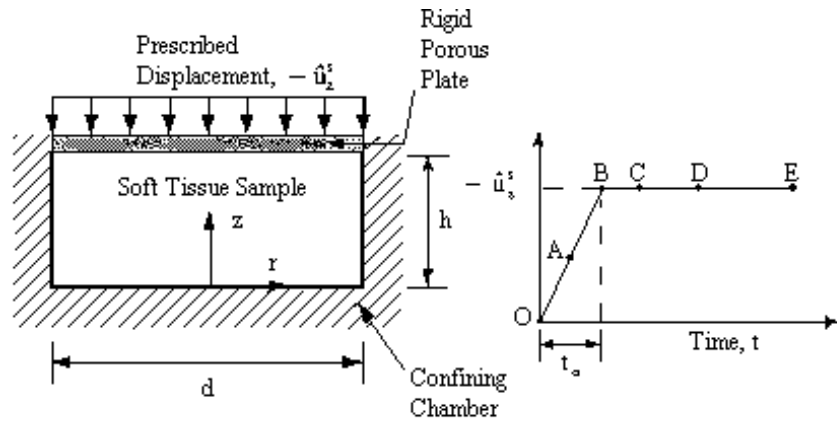


그림 4-9. 불구속 압축에서 수화된 연조직의 응력 감소

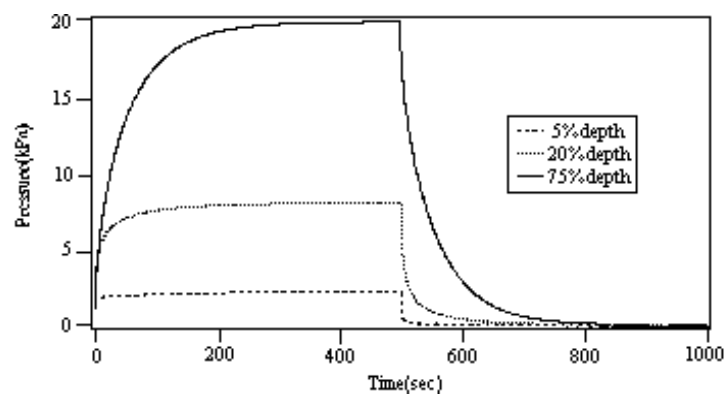


그림 4-10. 5%, 20%, 75% 깊이에서 압력의 시간별 변화 추이

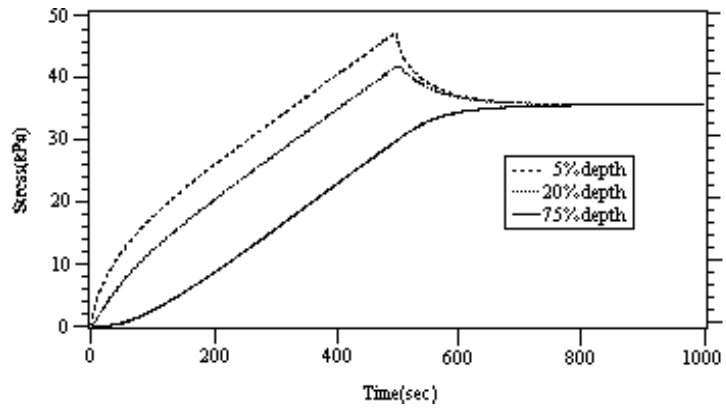


그림 4-11. 5%, 20%, 75% 깊이에서 고체상 응력의 시간별 변화 추이

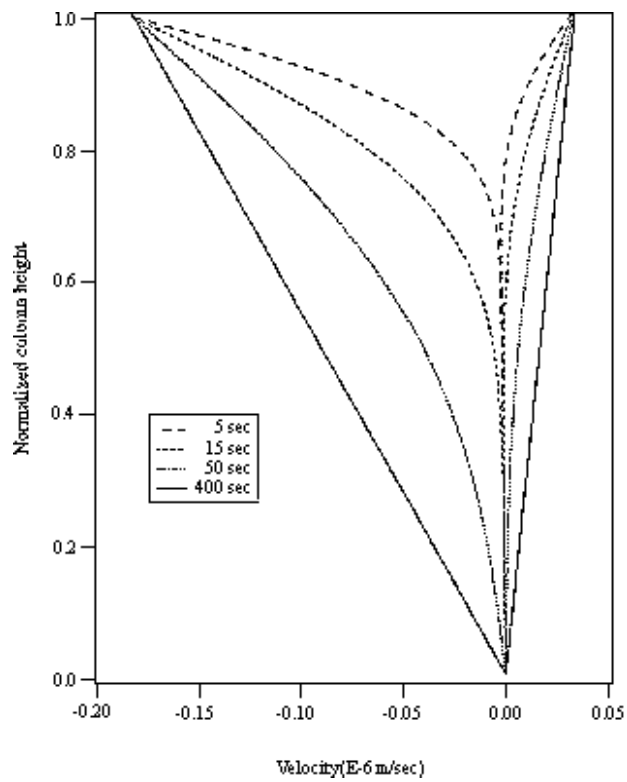


그림 4-12. 구속 압축에서 시간별 속도 분포

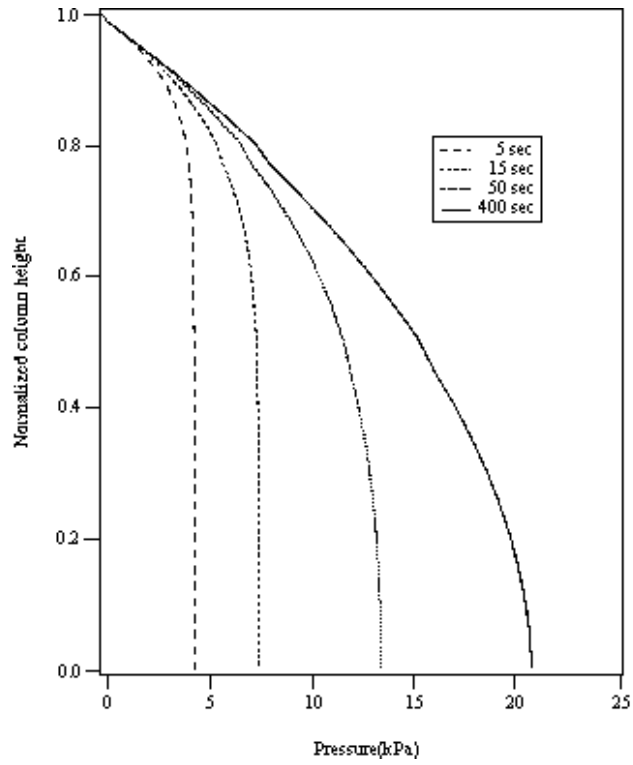


그림 4-13. 구속 압축에서 시간별 압력 분포

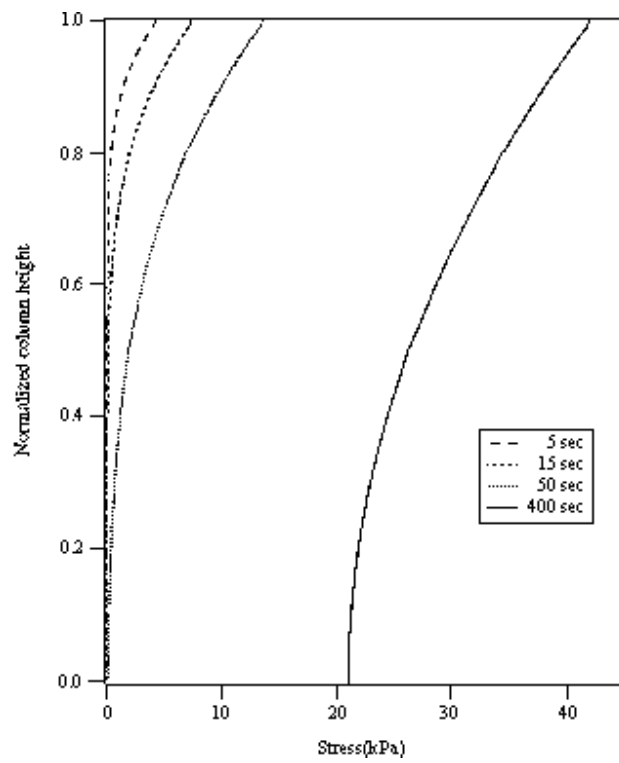


그림 4-14. 구속 압축에서 시간별 고체상의 응력 분포

## 5. 결 론

생체 연조직의 충격 하중하에서의 거동을 기술하기 위해 개발한 모델을 해석해를 통해 검증해 본 결과 정확한 해를 풀어낼 수 있음을 확인할 수 있었다. 그렇지만 압력 계산 과정에서 오차가 발생하였다. 변위는 정확히 계산하는 것으로 보아 압력을 계산하는 과정에서 사용하는 Gaussian Quadrature 수치 적분에 원인이 있는 것으로 생각되지만 이러한 원인에 대한 자세한 분석이 추후 더 필요하며, 적분 과정이 원인이라면 새로운 적분 방법이 제안되어야 할 것으로 생각된다. 많은 선행 연구자들이 그들의 모델 검증에 사용하는 응력 감소 문제를 해석하였다. 기존의 1 차미분방정식 형태의 모델들보다 보다 안정적이며 신속하게 해에 수렴함을 확인하였다. 앞으로 보다 실제적인 많은 문제에 적용하기 위해 3 차원 요소 개발과 비선형 모델로의 확장이 요구된다.

## 참고문헌

- (1) Mow V.C., Kuei S.C., Lai W.M. and Armstrong C.G., 1980, "Biphasic creep and stress relaxation of articular cartilage in compression: theory and experiments," *ASME JOURNAL OF BIOMECHANICAL ENGINEERING*, 102, pp. 73-84.
- (2) Bowen R.M., 1976, Theory of mixtures. In *Continuum Physics, III* (Ed. Eringen, A.E.), Academic Press, New York.
- (3) Spilker R.L. and Suh J.-K., 1990, "Formulation and evaluation of a finite element model for the biphasic model of hydrated soft tissues," *Comp. Struct.*, 35(4), pp. 425-439.
- (4) Spilker R.L. and Maxian T.A., 1990, "A mixed-penalty finite element formulation of the linear biphasic theory for soft tissues," *Int. j. numer. methods eng.*, 30, pp. 1063-1082.
- (5) Vermilyea M.E. and Spilker R.L., 1992, "A hybrid finite element formulation of the linear biphasic equations for hydrated soft tissue," *Int. j. numer. methods eng.*, 33, pp. 567-593.
- (6) Suh J.-K., Spilker R.L. and Holmes M.H., 1991, "A penalty finite element analysis for nonlinear mechanics of biphasic hydrated soft tissue under large deformation," *Int. j. numer. methods eng.*, 32, pp. 1411-1439.
- (7) Biot M.A., 1962, "Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media," *J. Appl. Physics*, 13, pp. 1482-1498.
- (8) Simon B.R., Zienkiewicz O.C. and Paul D.K., 1984, "An analytical solution for the transient response of saturated porous elastic solids," *Int. j. numer. anal. methods geomech.*, 8, pp. 381-398.
- (9) Zienkiewicz O.C. and Shiomi T., 1984, "Dynamic behavior of saturated porous media- the generalized Biot formulation and its numerical solution," *Int. j. numer. anal. methods geomech.*, 8, pp. 71-96.
- (10) Simon B.R., Wu J.S., Zienkiewicz O.C. and Paul D.K., 1986, "Evaluation of u-w and u-p finite element methods for the dynamic response of saturated porous media using one-dimensional models," *Int. j. numer. anal. methods geomech.*, 10, pp. 461-482.
- (11) Lai W.M. and Mow V.C., 1980, "Drag-induced compression of articular cartilage during a permeation experiment," *Biorheology*, 17, pp. 111-123.

- (12) Malkus D.S. and Hughes T.J.R., 1978, "Mixed finite elements-reduced and selective integration techniques: a unification of concepts," *Comput. Meth. appl. Mech. Engng.*, 15, pp. 63-81.
- (13) Hughes T.J.R., 1980, "Generalization of selective integration procedures to anisotropic and nonlinear media," *Int. j. Numer. Meth. Engng.*, 15, pp. 1413-1418.
- (14) Flanagan D.P. and Belytschko T., 1981, "A uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control," *Int. j. Numer. Meth. Engng.*, 17, pp. 676-706.
- (15) Nagtegaal J.C., Parks D.M. and Rice J.R., 1974, "On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range," *Comput. Meth. appl. Mech. Engng.*, 4, pp. 153-177.
- (16) Hughes T.J.R., 1987, "*The Finite Element Method; Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New York.