

# 가변 게인 축토포크 보상을 이용한 2관성계의 $H_\infty$ 제어에 관한 연구

## A Study on $H_\infty$ Control of 2-Mass System using Compensation of Shaft Torque with Variable Gain

김진수 (전기설비과)

Jin-Soo Kim (Dept. of Electrical Facilities)

Key Words : 2-Mass System,  $H_\infty$  Control, Shaft Torque, Variable Gain

ABSTRACT : In the industrial motor drive system, a shaft torsional vibration is often generated when a motor and a load are connected with a flexible shaft. In this paper, new  $H_\infty$  control using compensation of shaft torque with variable gain is proposed. According to simulation results, the proposed  $H_\infty$  control is excellent in disturbance rejection compared with the conventional  $H_\infty$  control and is robust compared with the  $H_\infty$  control with constant shaft torque compensation.

### 1. 서론

산업용 로봇트, 전기자동차의 구동부, 철강플랜트의 압연기 구동계, 엘리베이터 등에 대한 전동기 가변속 제어에 있어서 전동기와 부하가 강성이 작은 축으로 연결되는 경우 전동기의 관성과 부하의 관성에 의해 축에 비틀림 진동이 발생한다. 이와 같이 구성된 기계계를 2관성계라고 한다.

2관성계의 축비틀림 진동을 억제하기 위하여 최근 외란관측기를 이용하는 방법, 공진비제어에 의한 방법, 관측할 수 없는 상태변수를 추정하여 상태궤환을 하는 방법, LQG제어를 이용하는 방법, 강인제어인  $H_\infty$ 제어를 활용하는 방법 등이 연구되어지고 있다.<sup>(1~7)</sup> 일반적으로, 2관성계 제어의 최종목적이 되는 부하속도, 축비틀림토포크 및 부하외란토포크와 같은 양들은 실제 시스템에서 측정할 수 없는 경우가 많다. 따라서 최소차원관측기를 사용하여 측정 불가능한 상태변수들을 추정하고 이를 이용하여 극점배치방법에 의하여 상태궤환제어를 하는 방법들이 있다.<sup>(6,7)</sup> 그러나 이 방법에서는 목표치추종성능과 외란·진동억제성능 간에 서로 상충관계(trade-off)가 있어 두 가지 성능을 동시에 만족시키기는 어렵다.

이와 같은 연구 중에서 가중함수에 의하여 목표치추종성능과 외란·진동억제성능을 동시에 만족하게 하는 강인제어인  $H_\infty$ 제어를 중심으로 한 Robust제어의 연구가 활발하여 여러 분야에서 고성능의 제어를 실현하고 있다.

본 연구에서는 목표치추종성능과 외란·진동억제성능을 동시에 만족하게 하는 2관성계를 갖는 유도전동기의 새로운 속도제어법을 연구한다. 즉 가중함수에 의하여 목표치추종성능과 외란·진동억제성능을 동시에 만족하게 하는 강인제어인  $H_\infty$ 제어에 상태관측기에 의해 추정된 축토포크를 실용성을 고려하여 가변시켜 보상하는 제어법을 제안한다. 기존의  $H_\infty$ 제어 및 고정 게인 축토포크 보상을 이용한  $H_\infty$ 제어와 비교하여 제안하는 제어법의 유용성을 확인한다.

### 2. 2관성계

강성이 작은 축에 의해 전동기와 부하가 연결된 2관성계는 그림 1과 같고 그 블럭선도는 그

림 2와 같이 구성된다.

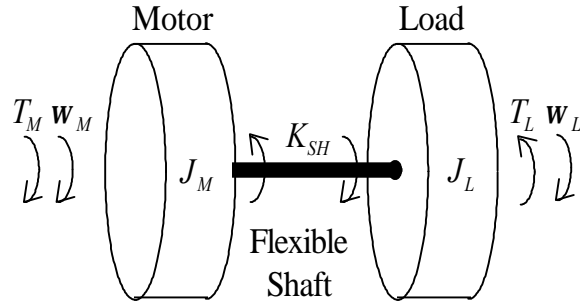


Fig. 1 Plant model of the two-mass system

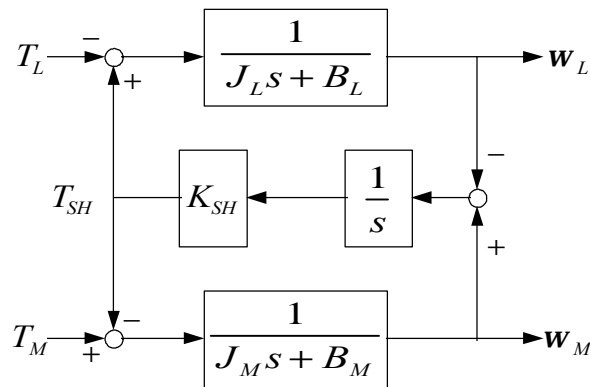


Fig. 2 Block diagram of the two-mass system

2관성계의 상태방정식은 다음 식과 같다.

$$\dot{x} = A_p x + B_p T_M + B_d T_L, \quad y = C_p x$$

(1)

여기서

$$x = \begin{pmatrix} \omega_M \\ T_{SH} \\ \omega_L \end{pmatrix}, \quad A_p = \begin{pmatrix} -\frac{B_M}{J_M} & -\frac{1}{J_M} & 0 \\ K_{SH} & 0 & -K_{SH} \\ 0 & \frac{1}{J_L} & -\frac{B_L}{J_L} \end{pmatrix}$$

$$B_p = \begin{pmatrix} \frac{1}{J_M} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{J_L} \end{pmatrix}, \quad C_p = (1 \ 0 \ 0)$$

단,  $J_M, J_L$  : 전동기, 부하관성모멘트

$B_M, B_L$  : 전동기, 부하감쇠계수

$K_{SH}$  : 저탄성 축비틀림정수

$\omega_M, \omega_L$  : 전동기, 부하 각속도

$T_M, T_{SH}, T_L$  : 전동기토크, 축비틀림토크, 부하외란토크

제어대상인 2관성계의 제어량은 부하속도  $\omega_L$ 이지만 일반적으로 계측 불가능하므로, 계측 가능한 전동기속도  $\omega_M$  을 제어하여 다음과 같은 제어목적을 실현한다.

- (1) 축비틀림진동을 억제한다.
- (2) 속도지령의 변화에 대하여 부하속도를 오버슈트 없이 빠르게 추종하도록 한다.
- (3) 부하토크의 변동에 대하여 전동기속도 및 부하속도의 변동을 작게 하며 스텝상의 부하토크 변동에 대하여 정상편차를 0으로 한다.

### 3. $H_\infty$ 제어 일반화플랜트

2관성계에 대하여  $H_\infty$ 제어이론을 적용하기 위하여 그림 3과 같이 일반화플랜트를 설정한다.

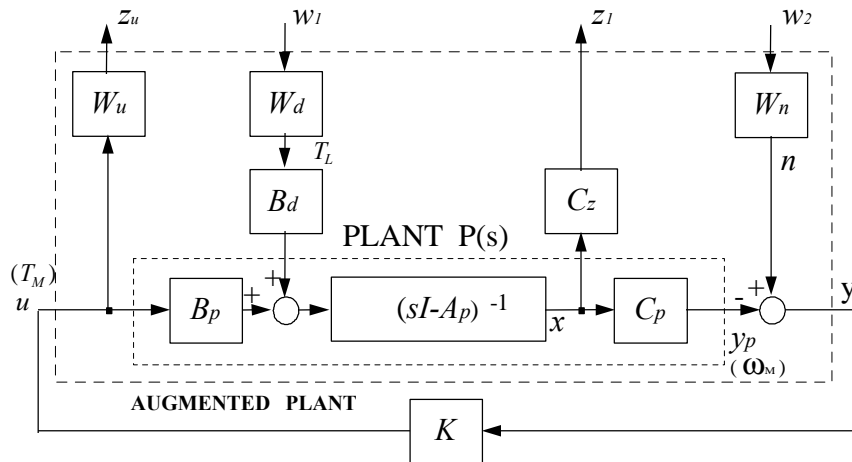


Fig. 3 Generalized plant of  $H_\infty$  control

그림 3에 있어서  $w_1, w_2$ 는 각각 외란과 지령치에 대한 입력이고,  $z_1, z_u$ 는 출력이다. 이 때  $z_1$ 은 다음과 같다.

$$z_1 = C_z x = \begin{bmatrix} \omega_M \\ \omega_M - \omega_L \\ \omega_L \end{bmatrix}, C_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$T_L$ 은 외란토크,  $n$ 은 속도지령치,  $W_d$ 와  $W_n$ 은 이를 위한 가중함수이다. 가중함수를

$$W_d = \begin{bmatrix} A_{Wd} & B_{Wd} \\ C_{Wd} & D_{Wd} \end{bmatrix}, W_n = \begin{bmatrix} A_{Wn} & B_{Wn} \\ C_{Wn} & D_{Wn} \end{bmatrix}, W_u = D_{Wu} \quad (3)$$

로 정의하면, 그림 3의 일반화플랜트의 상태공간표현과 입력과 출력의 관계  $G$ 는 다음 식과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$G := \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p & 0 & B_d C_{Wz} & 0 & B_d D_{Wz} & B_p \\ 0 & A_{Wn} & 0 & B_{Wn} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{Wz} & 0 & B_{Wz} & 0 \\ C_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{Wz} \\ -C_p & C_{Wn} & 0 & D_{Wn} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

#### 4. 2관성계의 $H_\infty$ 제어

2관성계의  $H_\infty$ 제어기를 설계한다. 그림 3의  $H_\infty$ 제어 일반화플랜트에서 외란입력  $w_1$ 에 가중함수  $W_d$ 를 곱한 것이 실제의 부하에 가해지는 외란토크  $T_L$ 이다.  $n$ 은 속도지령치이다.  $W_n$ 은 이에 대한 가중함수이다. 제어량  $z_u$ 는  $H_\infty$ 제어문제를 해결하기 위해 필요한 것으로 여기에서는  $W_u = 10^{-6}$ 으로 설정하고 있기 때문에 제어계의 설계에는 영향을 주지 못한다.

가중함수  $W_d$ 는 부하외란토크  $T_L$ 로부터 전동기속도, 부하속도 및 그것들의 차속도까지의 페루프전달함수의 가중함수이다. 이 페루프전달함수를 축이 없어서 비틀림이 없는 1관성계의 계인특성( $W_1$ )형태로 주파수 정형할 수 있다면 축비틀림진동은 억제 가능하다. 따라서  $|W_d|^{-1}$ 가 1관성계의 계인특성형태로 되도록 가중함수  $W_d$ 를 설계한다. 또한  $w_2$ 로부터의 전달함수에 주목하면  $W_n$ 은 상보감도함수의 가중함수로 되는 것을 알 수 있다. 따라서 고주파영역에 있어서 관측노이즈나 플랜트의 모델화오차 등의 영향을 제거하기 위하여 가중함수  $|W_n|^{-1}$ 가 로우패스특성을 갖도록 한다. 이상에 따라 2개의 가중함수를 식 (6)과 같이 설계한다.

$$W_d = \gamma_d \frac{(s + \omega_d)^2}{(s + 10^{-4})(s + 10^5)} \quad W_n = \gamma_n \frac{(s + 50)}{(s + 10^5)} \quad (6)$$

윗 식의 파라미터  $\gamma_d, \omega_d, \gamma_n$ 을 적절히 설계하여 Matlab을 사용하면  $H_\infty$ 제어기  $K(s)$ 를 구할 수 있다. 식 (6)의  $W_d$ 식에서 분모의  $10^{-4}$ 은 저주파영역에서 외란을 억제하기 위한 충분히 작은 값으로,  $10^5$ 은 공진주파수가 103.67[rad/s]이므로 공진주파수보다 충분히 큰 값으로 설정하고,  $W_n$ 식에서 분자의 50은 공진주파수보다 작은 값으로, 분모의  $10^5$

은 충분히 큰 값으로 설정한다.

시뮬레이션의 결과 설계파라미터  $\omega_d$ 는 공진주파수보다 낮고 반공진주파수 부근으로 설정하면 좋은 결과가 얻어졌다. 또한  $\gamma_d$ 를 크게 설정하면 외란억압특성은 향상되고  $\gamma_n$ 을 크게 설정하면 관측노이즈나 플랜트의 모델화 오차에 대한 견실성이 향상되지만 양자에는 상충관계가 있다. 따라서  $H_\infty$ 제어문제를 만족하는 범위에서  $\gamma_d, \gamma_n$ 을 크게 하여  $K(s)$ 를 결정한다. 이에 따라  $\gamma_d = 50, \omega_d = 15, \gamma_n = 20$ 으로 설정하면 이에 대한 보드선도는 그림 4와 같다. 그림에서  $|W_1|$ 은 1관성계의 계인특성이고,  $|W_d|^{-1}$ 가 1관성계의 계인특성  $|W_1|$  형태로 주파수 정형되었음을 보여준다. 이 경우의 제어기를 Matlab을 사용하여 구한다. 이와 같은 제어기가 그림 3의 제어기  $K$ 이다.

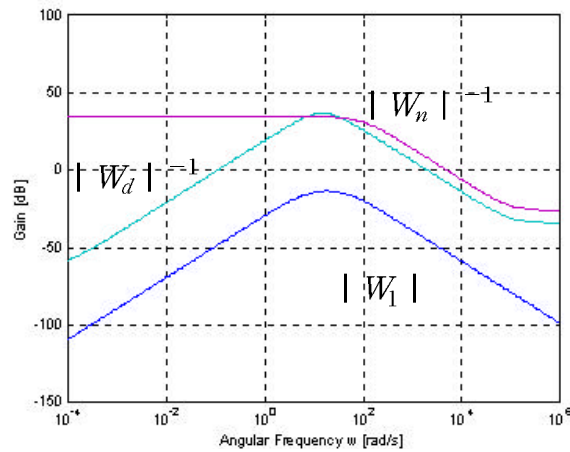


Fig. 4 Bode diagram of weights

이와 같은 식  $G$ 에 포함된 가중함수  $W_d, W_n, W_u$ 의 요소들을 적절히 선택한 후 Matlab을 이용하면 제어기  $K$ 를 구할 수 있다.

## 5. 상태관측기

본 논문에서는 강인제어인  $H_\infty$ 제어에 상태관측기를 통하여 추정된 속도오차를 보상하여 2관성계의 축비틀림 진동을 억제한다. 즉 속도오크  $T_{SH}$ 는 상태관측기를 구성하여 그 값을 추정한다. 미지입력인  $T_L$ 이 샘플링시간동안 일정하다고 가정한다면  $\frac{dT_L}{dt} = 0$ 이므로 추정 가능하다.  $\omega_M$ 을 입력에 포함시켜  $\hat{u} = [T_M, \omega_M]^T$ 로 놓으면  $\hat{x} = [\hat{\omega}_L, \hat{T}_{SH}, \hat{T}_L]^T$  대한 최소차원 관측기는 라플라스 연산자  $s$ 를 사용하여 다음 식으로 주어지게 된다.

$$s\hat{z} = \hat{A}\hat{z} + \hat{B}_1\hat{u}_1 + \hat{B}_2\hat{u}_2$$

(7)

여기서

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -\frac{B_L}{J_L} & \frac{1}{J_L} + \frac{1}{J_M} L_1 & -\frac{1}{J_L} \\ -K_{SH} & \frac{1}{J_M} L_2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_M} L_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{L_1}{J_M} \\ -\frac{L_2}{J_M} \\ -\frac{L_3}{J_M} \end{bmatrix}, \hat{B}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{B_L}{J_L} L_1 + \left[ \frac{1}{J_L} + \frac{1}{J_M} L_1 \right] L_2 \\ -\frac{1}{J_L} L_3 + \frac{B_M}{J_M} L_1 \\ -K_{SH} L_1 + \left[ \frac{1}{J_M} L_2 \right] L_2 \\ + K_{SH} + \frac{B_M}{J_M} L_2 \\ \left[ \frac{1}{J_M} L_3 \right] L_2 + \frac{B_M}{J_M} L_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\omega}_L \\ \hat{T}_{SH} \\ \hat{T}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{z}_1 \\ \hat{z}_2 \\ \hat{z}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} \omega_M$$

(8)

식 (8)에서  $\hat{A}$ 의 고유값이 관측기의 극으로 되므로 이 극배치에 따라 관측기의 응답속도를 설계하는 것이 가능하다. 식 (8)에 따라 관측기의 극은

$$\begin{aligned} \det (sI - \hat{A}) &= s^3 + \left( \frac{B_L}{J_L} - \frac{1}{J_M} L_2 \right) s^2 \\ &+ \left( K_{SH} \left( \frac{1}{J_L} + \frac{1}{J_M} L_1 \right) - \frac{B_L}{J_L} \frac{1}{J_M} L_2 \right) s \\ &- \frac{1}{J_L} K_{sh} \frac{1}{J_M} L_3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

(9)

의 해로 주어진다. 본 연구에서는  $s = -\omega_{\beta}$  3중근을 갖는 형태의 관측기를 설계한다. 이 경우 관측기 게인  $L_1, L_2, L_3$ 는 각각 다음 식으로 주어진다.

$$L_1 = J_M \left[ \frac{3 \omega_p^2 + \left( \frac{B_L}{J_L} \right) \left( \frac{B_L}{J_L} - 3\omega_p \right)}{K_{SH}} - \frac{1}{J_L} \right]$$

$$L_2 = \frac{\frac{B_L}{J_L} - 3\omega_p}{\frac{1}{J_M}}$$

$$L_3 = \frac{\omega_p^3}{-K_{SH} \frac{1}{J_M} \frac{1}{J_L}}$$

(10)

## 6. 가변 게인 축토포크 보상을 이용한 2관성계의 H<sub>∞</sub>제어

본 논문에서는 H<sub>∞</sub>제어에 상태관측기를 통하여 추정된 축토포크를 보상한다. 그림 5는 제안하는 시스템의 블록도이다. 관측기에서 추정된 축토포크에 게인  $K$ 를 곱하여 보상한다. 이 때 보상은 속도지령치와 실제속도와의 편차에 따라 가변 된다. 게인  $K$ 가 일정한 경우 즉 고정 게인을 갖는 경우는 robust 안정성에 문제가 있고, H<sub>∞</sub>제어만을 하는 경우는 진동억제시 한계가 있다. 본 논문에서는 과도시의 진동억제를 위하여 속도편차에 따른 가변 게인을 사용하였고, 정상시에는 안정성을 향상시키기 위하여 H<sub>∞</sub>제어만을 사용한다. 즉, 속도지령치와 실제속도의 편차가 정격속도의 10%내인 경우는 편차에 따라 가변 게인을 적용하고, 편차가 10% 이상인 경우는 일정게인을 사용한다.

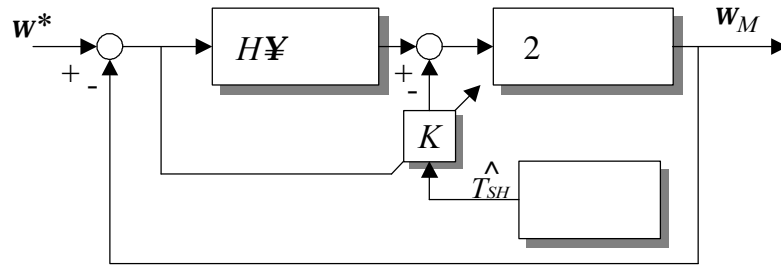


Fig. 5 Proposed System

## 7. 모의 실험

본 논문에서 제안한 제어법과 비교를 위하여 H<sub>∞</sub>제어만을 갖는 경우 및 고정 게인 축토포크 보상을 이용한 H<sub>∞</sub>제어와 비교하였다. 시뮬레이션에 사용된 전동기와 부하의 관성은 각각 0.008[kgm<sup>2</sup>]과 0.08[kgm<sup>2</sup>], 축의 비틀림상수는 78.16[Nm/rad]이고, 기계적 공진주파수는  $\omega_o = 103.67$  [rad/s]이다. 부하외란 억압시험으로 600[rpm]의 무부하 일정속도하에서 시간이 2초일 때 순간적으로 정격토포크의 100%에 해당하는 12.1[Nm]의 부하토포크를 인

가하였다.

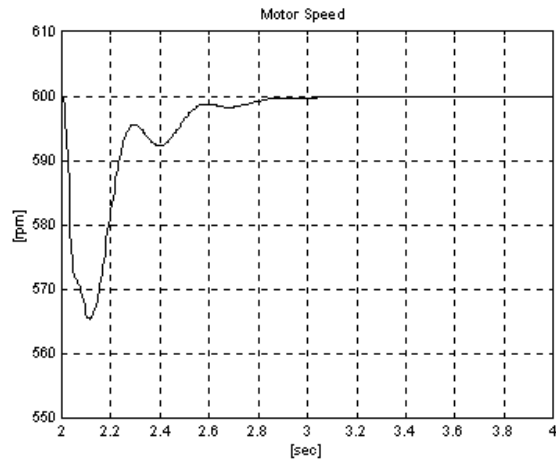
그림 6은 기존의  $H_{\infty}$ 제어의 결과이다. 외란이 인가된 경우 전동기속도는 약 565[rpm]까지 떨어져 5.8% 하강하며 1.0초 후에 회복된다. 부하속도는 약 554[rpm]까지 떨어져 7.7% 하강하며 1.0초 후에 회복된다. 축토포크는 19[Nm]가 걸린 후 감소하여 12.1[Nm]에서 안정된다. 전동기의 관성에 비하여 부하의 관성이 더 커지면 응답시간이 더 길어지고, 부하의 관성이 더 작아지면 응답시간은 더 짧아지게 된다.

그림 7은 그림 5에서  $K=0.15$ 로 한 즉 고정 게인 축토포크 보상을 이용한  $H_{\infty}$ 제어의 결과이다. 게인 값이 작아 그림 6의 경우와 비슷하며 차이는 부하속도에서 진동에 따른 오버슈트가 발생된다.

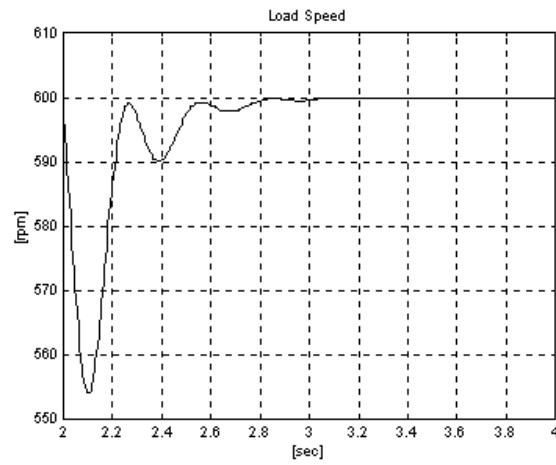
그림 8은  $K=0.3$ 으로 한 고정 게인 축토포크 보상을 이용한  $H_{\infty}$ 제어의 결과이다. 게인 값이 커짐에 따라 전동기속도는 약 570[rpm]까지 떨어져 5.0% 하강하며 1.4초 후에 회복되며, 부하속도는 약 559[rpm]까지 떨어져 6.8% 하강하며 1.4초 후에 회복된다. 그러나 부하속도 및 축토포크에서 진동이 증가되어 오버슈트가 크게 되므로 안정적이지 못하다.

그림 9는 제안한  $H_{\infty}$ 제어의 결과이다. 외란이 인가된 경우 전동기속도는 약 574[rpm]까지 떨어져 4.3% 하강하며 1.4초 후에 회복된다. 부하속도는 약 560[rpm]까지 떨어져 6.7% 하강하며 1.4초 후에 회복된다. 축토포크는 20[Nm]가 걸린 후 감소한다. 이를 통해 제안한  $H_{\infty}$ 제어는 기존의  $H_{\infty}$ 제어보다 전동기의 속도는 1.5%, 부하속도는 1.0%의 외란억압 효과가 더 있음을 알 수 있다. 이것은 축토포크를 추정하여 보상한 결과이다. 또한 고정 게인 축토포크 보상을 이용한  $H_{\infty}$ 제어보다 부하속도와 축토포크에서 진동적이지 않아 더 안정적임을 알 수 있다. 이상의 결과로 제안하는  $H_{\infty}$ 제어의 유용성을 확인할 수 있다.

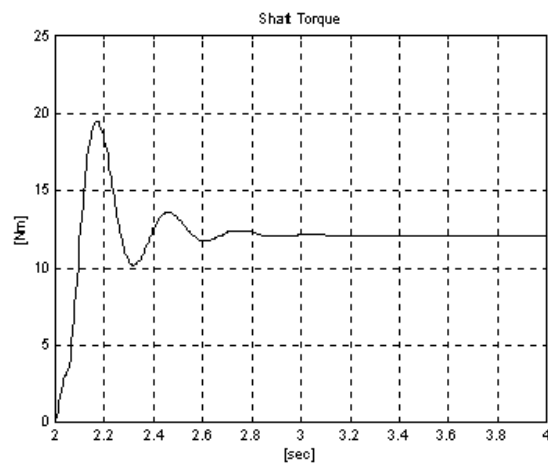




(a) Motor speed ( 10 [rpm]/div, 0.2 [sec]/div )

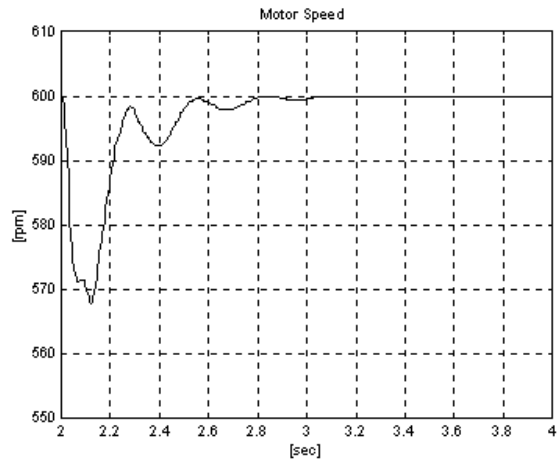


(b) Load speed ( 10 [rpm]/div, 0.2 [sec]/div )

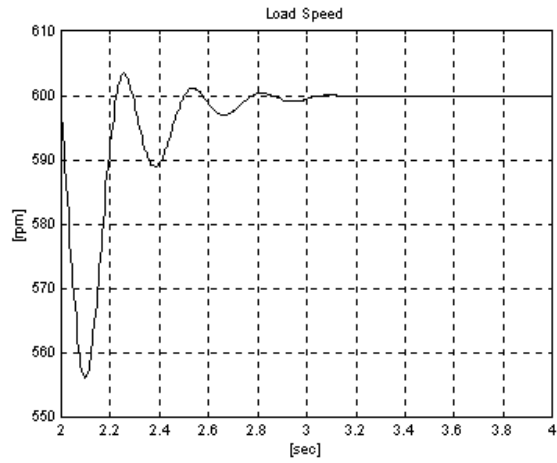


(c) Shaft torque ( 5 [Nm]/div, 0.2 [sec]/div )

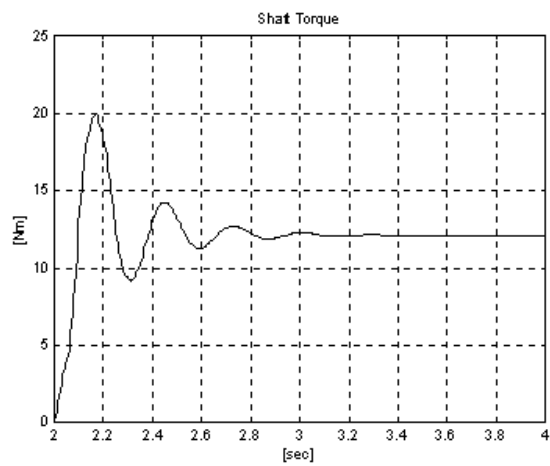
Fig. 6 Conventional  $H_\infty$  Control



(a) Motor speed ( 10 [rpm]/div, 0.2 [sec]/div )

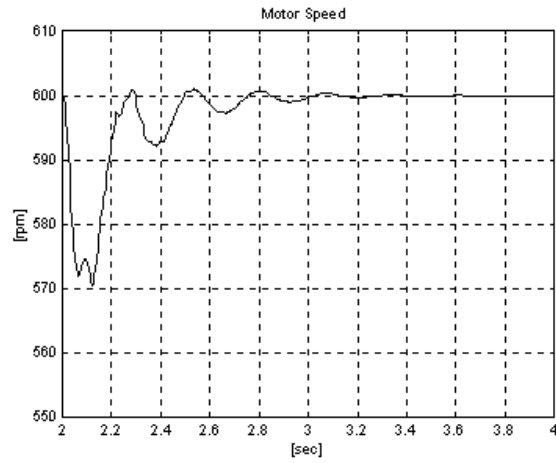


(b) Load speed ( 10 [rpm]/div, 0.2 [sec]/div )

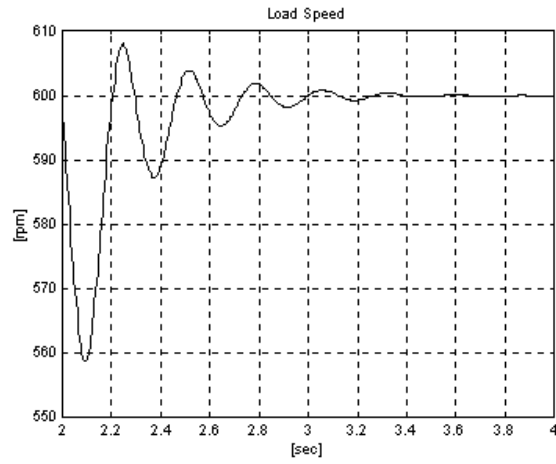


(c) Shaft torque ( 5 [Nm]/div, 0.2 [sec]/div )

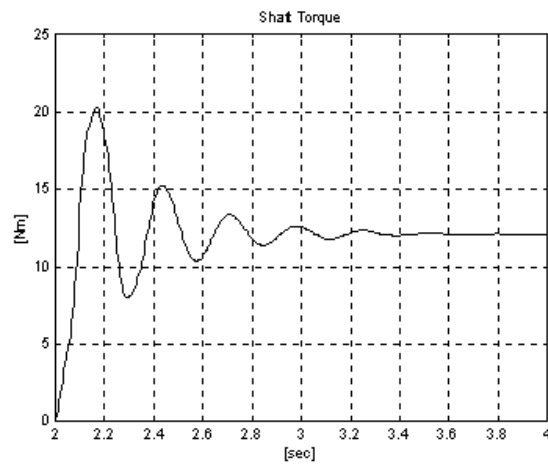
Fig. 7  $H_\infty$  control using constant shaft torque compensation ( $K=0.15$ )



(a) Motor speed ( 10 [rpm]/div, 0.2 [sec]/div )

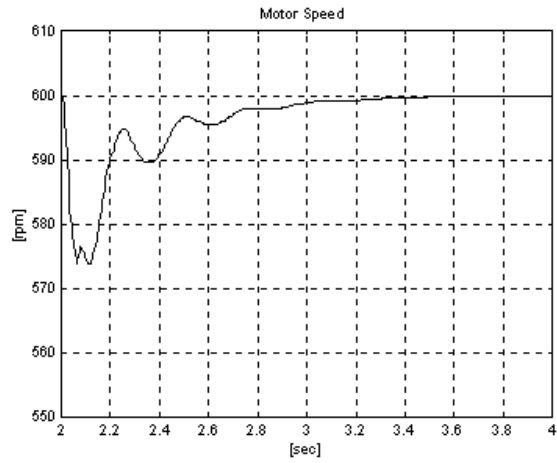


(b) Load speed ( 10 [rpm]/div, 0.2 [sec]/div )

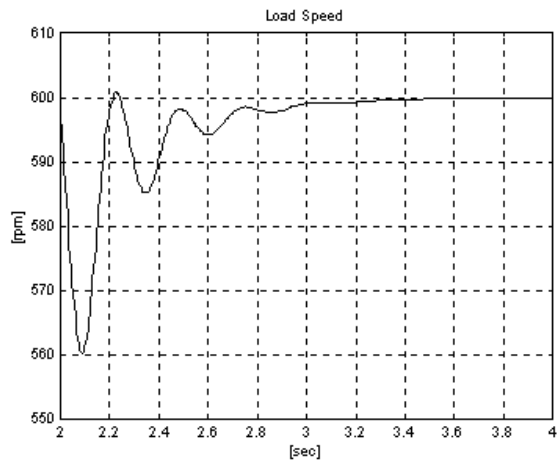


(c) Shaft torque ( 5 [Nm]/div, 0.2 [sec]/div )

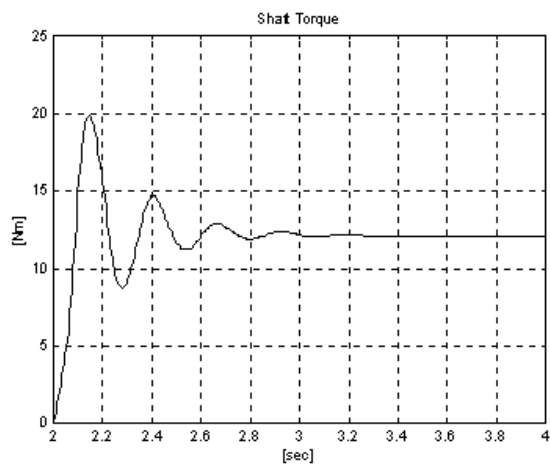
Fig. 8  $H_\infty$  control using constant shaft torque compensation ( $K=0.3$ )



(a) Motor speed ( 10 [rpm]/div, 0.2 [sec]/div )



(b) Load speed ( 10 [rpm]/div, 0.2 [sec]/div )



(c) Shaft torque ( 5 [Nm]/div, 0.2 [sec]/div )

Fig. 9 Proposed  $H_{\infty}$  Control

## 8. 결론

본 논문에서는 전동기와 부하가 강성이 작은 축에 의해 결합되어 낮은 공진주파수로 진동하는 2관성계에 대한 속도제어를 다루었고 외란억압성능을 개선할 수 있는 2관성계의 새로운 속도제어법을 제안하였다. 즉 가중함수에 의하여 목표치추종성능과 외란억압성능을 동시에 만족하게 하는 강인제어인  $H_\infty$ 제어에 상태관측기에 의해 추정된 축토크를 실용성을 고려하여 가변시켜 보상하는 제어법을 제안하였다. 모의 실험을 통해 비교한 결과 기존의  $H_\infty$ 제어보다 외란억압성능이 향상되었고, 고정 계인 축토크 보상을 이용한  $H_\infty$ 제어가 고정 계인을 증가시키면 진동이 증가되어 불안정하게 되는 반면 제안한  $H_\infty$ 제어는 가변 계인을 사용하므로 안정적이어서 더 실용적임을 확인할 수 있었다.

## 참고문헌

- (1) 結城和明 外 2人, 1993, “共振比制御による2慣性共振系の振動抑制制御”, *日本電氣學會論文誌*, Vol.113-D, No. 13, pp. 1162~1169
- (2) 杉林 道彦 外 2人, 1993, “2慣性共振系の状態フィードバックによる振動抑制制御とパラメータ變動を考慮した制御特性”, *日本電氣學會 産業應用部門全國大會*, pp. 843~848
- (3) Ji et. al., “LQG Based Speed Controller for Torsional Vibration Suppression in 2-Mass Motor Drive System”, *IEEE IECON*, Vol. 2, pp. 1157~1162
- (4) 大内茂人 外 2人, 1993, “ $H_\infty$ 制御理論に基づく電動機の制振制御”, *日本電氣學會論文誌*, Vol.113-D, No. 3, pp. 325~332
- (5) Akihiko Tanisaka et al, 1991, “Application of  $H_\infty$  Control to Motor Speed Control System”, *IEEE IECON*, pp. 839~842
- (6) 海田英俊 外 1人, 1993, “最小次元外亂トルクオブザーバに基づく多慣性機械系の振動抑制制御”, *日本電氣學會 研究會資料*, SPC-93-38, pp. 81~90
- (7) 岩崎 誠 外 2人, 1994, “2慣性共振系の状態フィードバック制御と定數計測法”, *日本電氣學會 産業應用部門全國大會*, pp. 1180~1185